

一种由明暗恢复形状的改进变分算法

杨磊, 韩九强

(西安交通大学电子与信息工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对变分算法可能丢失表面细节信息的问题,提出了一种由明暗恢复形状的改进变分算法,使用接近实际的混合反射模型描述的反射图方程和图像梯度方程构造了新的目标泛函,由于图像梯度反映了二维图像的细节信息,新目标泛函比仅使用反射图方程的目标泛函蕴涵了更加丰富的三维形状细节信息.然后,使用变分原理求解该目标泛函,得到由明暗恢复形状的改进变分算法.所提出的算法比基本变分算法三维形状恢复的精度有显著提高.合成半球图像的实验表明,新算法在相同迭代次数时恢复三维形状的平均相对误差比基本变分算法减小了13.45%.实际复杂图像的三维形状恢复结果表明,新算法在恢复表面三维细节时比基本变分算法更加准确.

关键词: 变分算法;明暗恢复形状;反射图;图像梯度

中图分类号: TP391.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)04-0418-05

Improved Variational Algorithm of Shape-from-Shading

YANG Lei, HAN Jiuqiang

(School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: An improved variational approach of shape-from-shading is proposed. A new objective functional is formulated using a reflectance map equation and an image gradient equation. The reflectance map equation is described by a hybrid reflectance model which is prone to reality. Since the gradients of images exhibit the detailed information of two-dimensional image, the new objective functional contains more information of three-dimensional surface than the objective functional formulated by only reflectance map equation. Then, an improved algorithm of shape-from-shading is proposed by using the variational principle. The accuracy of the proposed algorithm is improved evidently compared with the basic variational algorithm, and experiments on synthetic images of hemisphere show that the relative average error of the proposed algorithm is reduced by 13.45% under the same iteration times. Reconstruction results from real complicated images show that the proposed algorithm is more accurate than the basic variational algorithm in dealing with the details of the surface.

Keywords: variational algorithm; shape from shading; reflectance map; image gradient

由单幅图像灰度的明暗变化恢复表面三维形状(Shape-from-Shading, SFS)是计算机视觉中被动三维测量技术的重要方法之一,广泛应用于工业生产自动化测量、医学、SAR图像地形测量及月球表面形状恢复^[1-3]. SFS算法在20世纪70年代由Horn等人^[4-5]提出并发展.在此基础上,又提出了多

种改进算法,如变分法、有限元算法、神经网络算法、水平集方法以及粘性解方法等^[6-10],其中基于变分原理的算法是一类重要的重构算法^[3-4,6,11].然而,作为一种全局算法,使用反射图方程构造目标泛函的变分法在恢复表面三维形状时可能会丢失表面细节信息.

本文提出了一种能有效恢复表面细节的 SFS 变分改进算法。该算法使用既含有漫反射又含有镜面反射的反射图方程,考虑图像梯度反映了物体的二维图像和三维形状的细节信息^[12],由反射图方程和图像梯度方程构造新的目标泛函,再使用变分原理,得到由明暗恢复形状的改进算法。

1 反射图方程及目标泛函

设像平面为 xy ,摄像机方向与 z 轴重合,在正交投影成像条件下,SFS 问题是求解图像的反射图方程^[5]

$$R(p(x,y),q(x,y)) = I(x,y) \quad (1)$$

式中: $R(p(x,y),q(x,y))$ 是由反射模型确定的反射图; $I(x,y)$ 是采集的灰度图像。 $[p(x,y), q(x,y), -1]^T$ 是表面高度函数 $z=z(x,y)$ 的梯度向量,其中

$$p(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}; q(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

以下 $p(x,y), q(x,y)$ 分别简记为 p, q 。

已知点光源方向向量为 $[p_0, q_0, -1]^T$,摄像机方向向量为 $[p_c, q_c, -1]^T$,其中 p_0 和 q_0 分别是光源方向向量在 x 轴和 y 轴方向的分量, p_c 和 q_c 分别是摄像机方向向量在 x 轴和 y 轴方向的分量。光源与摄像机中垂线的方向向量为 $[(p_c + p_0)/2, (q_c + q_0)/2, -1]^T$,记为 $[p_h, q_h, -1]^T$ 。常用的漫反射表面和镜面反射表面的反射图分别用 Lamertian 模型^[4]和 Phong 模型^[13]表示,而由漫反射模型和镜面反射模型的线性组合构成的接近实际的混合反射模型的反射图可描述为^[8]

$$R(p,q) = (1-\omega) \frac{pp_0 + qq_0 + 1}{(p^2 + q^2 + 1)^{1/2}(p_0^2 + q_0^2 + 1)^{1/2}} + \omega \left[\frac{pp_h + qq_h + 1}{(p^2 + q^2 + 1)^{1/2}(p_h^2 + q_h^2 + 1)^{1/2}} \right]^K \quad (2)$$

式中: $\omega \in [0, 1]$ 和 $K \in \mathbf{Z}^+$ 是光滑因子和镜面反射指数因子,其值可用同类材质表面形状已知的图像测得^[14]。

设图像 $I(x,y)$ 在 x 和 y 方向的梯度分别是 $I_x(x,y)$ 和 $I_y(x,y)$,由式(1)得图像梯度方程

$$\begin{cases} I_x(x,y) = \frac{\partial I}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} \\ I_y(x,y) = \frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} \end{cases} \quad (3)$$

以下 $\frac{\partial R}{\partial p}$ 和 $\frac{\partial R}{\partial q}$ 简称为 R_p 和 R_q ,基本 SFS 变分算法是以采集的图像和反射图的整体误差构造目标泛

函,使用变分法求解三维表面函数,而图像的梯度反映了物体的二维图像和三维形状的细节信息,因此可以由反射图方程式(1)和图像梯度方程式(3)构造新的目标泛函

$$E = \min \iint_D (R(x,y) - I(x,y))^2 + \alpha ((R_x(x,y) - I_x(x,y))^2 + (R_y(x,y) - I_y(x,y))^2) dx dy \quad (4)$$

式中: D 是图像区域; $\alpha \geq 0$ 为图像梯度加权因子,可通过多次实验得到其最佳数值。

假设待恢复的高度函数 $z=z(x,y)$ 具有至少二阶连续偏导数,有正则化约束条件 $p=z_x, q=z_y, p_x=z_{xx}, q_y=z_{yy}$,则含有正则化约束条件的新目标泛函为

$$E = \min \iint_D (R(x,y) - I(x,y))^2 + \alpha ((R_x(x,y) - I_x(x,y))^2 + (R_y(x,y) - I_y(x,y))^2) + \lambda ((p - z_x)^2 + (q - z_y)^2 + (p_x - z_{xx})^2 + (q_y - z_{yy})^2) dx dy \quad (5)$$

式中: $E=E(p,q,z)$ 是关于 p, q 和 z 的泛函; $\lambda > 0$ 是 Lagrange 乘子。下面用变分原理求解式(5)。

2 基于变分原理的 SFS 新算法

设函数 p, q 及 z 增加变分增量 $\delta p, \delta q$ 和 δz 后为 $p' = p + \delta p, q' = q + \delta q$ 和 $z' = z + \delta z$ 。采用文献^[11]偏导数变分公式 $p'_x = p_x - \delta p, q'_x = q_x - \delta q, z'_x = z_x - \delta z, p'_y = p_y - \delta p, q'_y = q_y - \delta q, z'_y = z_y - \delta z, z'_{xx} = z_{xx} - 2\delta z, z'_{yy} = z_{yy} - 2\delta z$ 。

设

$$F(p,q,p_x,q_x,p_y,q_y,z_x,z_y,z_{xx},z_{yy}) = (R - I)^2 + \alpha ((R_p p_x + R_q q_x - I_x)^2 + (R_p p_y + R_q q_y - I_y)^2) + \lambda ((p - z_x)^2 + (q - z_y)^2 + (p_x - z_{xx})^2 + (q_y - z_{yy})^2)$$

则

$$F(p',q',p'_x,q'_x,p'_y,q'_y,z'_x,z'_y,z'_{xx},z'_{yy}) = (R + R_p \delta p + R_q \delta q - I)^2 + \alpha ((R_p(p_x - \delta p) + R_q(q_x - \delta q) - I_x)^2 + (R_p(p_y - \delta p) + R_q(q_y - \delta q) - I_y)^2) + \lambda ((p + \delta p - z_x + \delta z)^2 + (q + \delta q - z_y + \delta z)^2 + (p_x - \delta p - z_{xx} + 2\delta z)^2 + (q_y - \delta q - z_{yy} + 2\delta z)^2) \quad (6)$$

记 $F(p',q',p'_x,q'_x,p'_y,q'_y,z'_x,z'_y,z'_{xx},z'_{yy})$ 为 F' ,求式(5)泛函极小值对应的变分式为 $\delta F = F' - F$ 关于变分增量 $\delta p, \delta q$ 和 δz 的偏导数为 0,即

$$\frac{\partial \delta F}{\partial \delta p} = 0; \frac{\partial \delta F}{\partial \delta q} = 0; \frac{\partial \delta F}{\partial \delta z} = 0 \quad (7)$$

展开式(7)并整理得

$$\left. \begin{aligned} &((1+2\alpha)R_p^2 + 2\lambda)\delta p + (1+2\alpha)R_q R_p \delta q + \\ &(-\lambda)\delta z = -(R - I - \alpha(R_p p_x + R_q q_x - \\ &I_x + R_p p_y + R_q q_y - I_y))R_p - \\ &\lambda(p - z_x - p_x + z_{xx}) \\ &(1+2\alpha)R_q R_p \delta p + ((1+2\alpha)R_q^2 + 2\lambda)\delta q + \\ &(-\lambda)\delta z = -(R - I - \alpha(R_p p_x + R_q q_x - I_x + \\ &R_p p_y + R_q q_y - I_y))R_q - \lambda(q - z_y - q_y + z_{yy}) \\ &(-1)\delta p + (-1)\delta q + 10\delta z = -(p - z_x + q - \\ &z_y) - 2(p_x - z_{xx} + q_y - z_{yy}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

求解关于变分增量 δp 、 δq 和 δz 的线性方程组式(8),得到迭代形式的 SFS 新算法

$$\left. \begin{aligned} p^{(k+1)} &= p^{(k)} + \delta p^{(k)} \\ q^{(k+1)} &= q^{(k)} + \delta q^{(k)} \\ z^{(k+1)} &= z^{(k)} + \delta z^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中: $k \in \mathbf{Z}^+$ 是迭代次数.

3 计算细节及算法性能分析

设图像的分辨率为 $M \times N$, 离散域坐标 $(i, j) \in [1, M] \times [1, N]$ 对应连续域坐标 $(x, y) \in D^2$. 用差分近似方程组式(8)的各项中的偏导数 $p_x(i, j)$ 、 $p_y(i, j)$ 、 $q_x(i, j)$ 、 $q_y(i, j)$ 、 $z_x(i, j)$ 、 $z_y(i, j)$ 、 $z_{xx}(i, j)$ 、 $z_{yy}(i, j)$ 、 $I_x(i, j)$ 和 $I_y(i, j)$, 从而求解变分增量 δp 、 δq 和 δz .

因此,提出算法的迭代计算过程为:设 $k=0$, 设定各像素点初值 $p^{(k)}$ 、 $q^{(k)}$ 和 $z^{(k)}$;用插分公式计算方程组式(8)的各项,进而计算 $\delta p^{(k)}$ 、 $\delta q^{(k)}$ 和 $\delta z^{(k)}$,用式(9)计算 $p^{(k+1)}$ 、 $q^{(k+1)}$ 和 $z^{(k+1)}$;判断恢复的三维形状 $z^{(k+1)}$ 是否达到精度要求,如果没有,令 $k=k+1$, 返回迭代计算,否则结束计算,输出高度值.

下面分析算法的性能. 计算式(8)的系数行列式

$$\begin{vmatrix} (1+2\alpha)R_p^2 + 2\lambda & (1+2\alpha)R_p R_q & -\lambda \\ (1+2\alpha)R_p R_q & (1+2\alpha)R_q^2 + 2\lambda & -\lambda \\ -1 & -1 & 10 \end{vmatrix} = \lambda(1+2\alpha)(18R_p^2 + 18R_q^2 + (R_p + R_q)^2) + 36\lambda^2 > 0 \quad (10)$$

因此,迭代算法是稳定的.

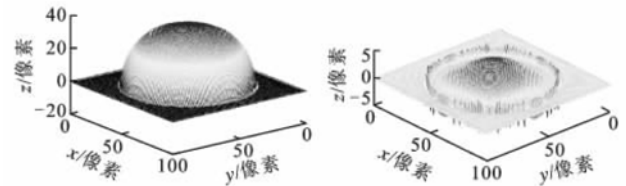
观察式(10)和 Lagrange 乘子 λ 对应的正则约束项 $(p - z_x)^2 + (q - z_y)^2 + (p_x - z_{xx})^2 + (q_y - z_{yy})^2$, 可见:如果 λ 的取值太小,则算法可能不稳定;如果 λ 的取值太大,算法收敛太慢. 式(12)可以对文献[4]的迭代算法中正则约束系数 λ 的选择给

以解释. 本文实验中 λ 采用变化取值,在算法稳定的条件下,先选择较小数值,然后逐渐调整到较大值.

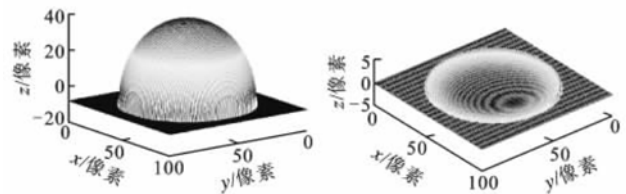
4 实验

4.1 合成图像的三维形状恢复

本文实验的运行环境如下:CPU 为 AMD 1.7 GHz, RAM 为 512 MB, 软件为 Windows 2000 及 Matlab 6.5. 用混合反射模型式(2)生成半径为 40 像素的半球图像. 图像分辨率为 100×100 像素,光源方向为 $[0.01, 0.01, -1]^T$, 摄像机的方向为 $[0, 0, -1]^T$, 选取 $w=0.1$, $K=10$. 图 1 是用文献[4]基本变分法和本文算法在迭代次数为 3000 时对合成半球三维形状恢复的结果.



(a)文献[4]算法恢复的形状 (b)图 1a 与半球的误差



(c)本文算法恢复的形状 (d)图 1c 与半球的误差

图 1 半球合成图像的三维形状恢复比较

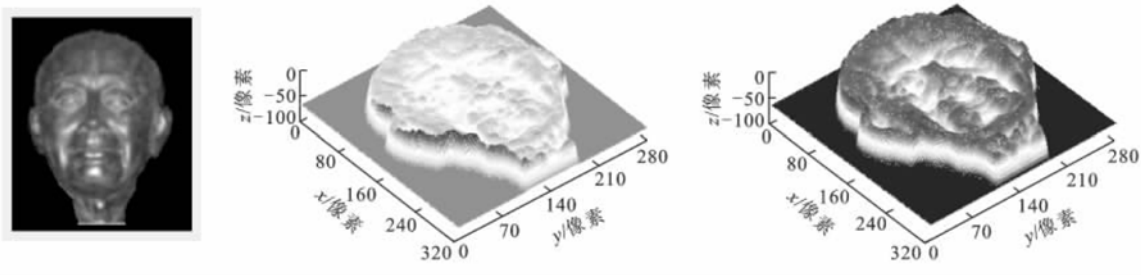
表 1 是本文的改进算法和文献[4]基本变分算法的定量比较. 由表 1 可以看出,在相同迭代次数时,本文算法在重构高度平均误差和高度均方根误差上比基本变分算法有所减小,迭代次数为 3 000 时,本文算法重构高度的平均相对误差比文献[4]算法减少了 13.45%. 由图 1 和表 1 可见,本文算法的重构误差比基本变分法有所减小.

4.2 实际图像的三维形状恢复

图 2 是对一幅实际拍摄的西安交通大学图书馆前钱学森塑像图像进行三维形状恢复的结果. 图 2a 是经过平滑滤波处理的灰度图像. 混合反射模型的参数取 $w=0.3$, $K=15$. 由于采用摄像机自带闪光灯,故光源方向近似是 $[0, 0, -1]^T$, 摄像机的方向为 $[0, 0, -1]^T$. 图像的分辨率为 280×320 像素. 由图 2

表 1 改进算法与文献[4]基本变分法的性能比较

迭代次数	高度平均误差/像素		高度均方根误差/像素		高度平均相对误差/%	
	文献[4]算法	本文算法	文献[4]算法	本文算法	文献[4]算法	本文算法
1 000	8.210 3	7.799 9	10.170 2	4.894 8	40.91	29.27
1 500	4.847 1	4.136 2	6.108 4	3.625 9	19.87	12.53
2 000	2.751 1	2.294 4	3.565 4	2.025 9	10.38	7.81
2 500	1.488 6	1.256 3	1.991 8	1.375 6	5.62	4.78
3 000	0.809 9	0.659 7	1.066 5	0.872 5	3.42	2.96



(a)实际雕塑的灰度图像 (b)文献[4]算法恢复的形状 (c)本文算法恢复的形状
图 2 实际雕塑图像的三维形状恢复比较

可见,本文算法与基本变分算法相比,在额头、耳朵、鼻梁等处恢复的结果更逼真. 总体而言,本文算法恢复的三维形状的表面细节信息更加丰富.

5 结 论

针对变分法在恢复表面三维形状时可能丢失表面细节信息的缺点,本文提出了一种基于变分原理的明暗恢复形状的改进算法. 改进算法使用由反射图方程和图像梯度方程所构成的新目标泛函,由变分原理得到由明暗恢复形状的迭代新算法. 与基本变分算法相比,本文算法在利用变分原理的同时,考虑了人的视觉特性,新目标泛函含有图像梯度信息,从而在恢复表面三维形状时,对表面细节的处理更准确. 实验结果表明本文算法比基本变分算法的性能有明显改进.

参考文献:

[1] SONG Limei, QU Xinghua, XU Kexin, et al. Novel SFS-NDT in the field of defect detection [J]. International NDT & E, 2005, 38(5): 381-386.
[2] BORS A G, HANCOCK E R, WILSON R C. Terrain analysis using radar shape-from-shading [J]. IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2003, 25(8): 974-992.
[3] DU Quanying, CHEN Shanben, LIN Tao. Inspection

of weld shape based on the shape from shading [J]. Int J Adv Manuf Technol, 2006, 27(7): 667-671.
[4] HORN B K P. Height and gradient from shading [J]. Int J Computer Vision, 1990, 5(1): 37-75.
[5] ZHANG R, TSAI P S, CRYER J E, et al. Shape from shading: a survey [J]. IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1999, 21(8): 690-706.
[6] HORN B K P, BROOKS M J. The variational approach to shape from shading[J]. Computer Vision Graphics Image Process, 1986, 33(2): 174-208.
[7] LEE K M, KUO C C J. Shape from shading with a linear triangular element surface model [J]. IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1993, 15(8): 815-822.
[8] CHO S Y, CHOW T W S. A new color 3D SFS methodology using neural-based color reflectance models and iterative recursive method [J]. Neural Computation, 2002, 14(11): 2751-2789.
[9] RON K, JAMES A S. Optical Algorithm for shape from shading and path planning [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2001, 14(3): 237-244.
[10] PRADOS E, CAMILLI F, FAUGERAS O. A unifying and rigorous shape from shading method adapted to realistic data and applications [J]. J Math Imaging, 2006, 25(3): 307-328.
[11] ZHENG Q, CHELLAPPA R. Estimation of illumi-

- nant direction, albedo, and shape from shading[J]. IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1991, 13(7): 680-702.
- [12] ZHANG R, MUBARAK S. Shape from intensity gradient [J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics: A: Systems and Humans, 1999, 29(3): 318-325.
- [13] TAGARE H D, DEFIGUEYREDO R J P. A theory of photometric stereo for a class of diffuse non-Lambertian surfaces [J]. IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1991, 13(2): 133-152.
- [14] LIN C T, Cheng W C, LIANG S F. Neural-network-based adaptive hybrid-reflectance model for 3-D surface reconstruction[J]. IEEE Trans Neural Networks, 2005, 16(6): 1601-1615.

(编辑 刘杨)